第３講　微分と増減

3 ［A］ $f(x)=\dfrac{6x+16}{x^2+4}$ の最大値と最小値を求めよ．

［B］ $y=\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ のグラフを描け．ただし，必要であれば $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-2x}=0$ を用いてもよい．

［C］ x の方程式 $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ $(x\geqq 0)$ の異なる実数解の個数が最大となるとき，k の値の範囲を求めよ．

第３講　微分と増減

$\boxed{3}$ ［A］ $f(x)=\dfrac{6x+16}{x^2+4}$ の最大値と最小値を求めよ．

［B］ $y=\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ のグラフを描け．ただし，必要であれば $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-2x}=0$ を用いてもよい．

［C］ x の方程式 $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ $(x\geqq 0)$ の異なる実数解の個数が最大となるとき，k の値の範囲を求めよ．

【答】 ［A］ 最大値 $\dfrac{9}{2}$，最小値 $-\dfrac{1}{2}$　［B］ 略　［C］ $-2<k\leqq 0$

【解説】 ［A］ $f'(x)=\dfrac{(6x+16)'(x^2+4)-(6x+16)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}=-\dfrac{2(3x-2)(x+6)}{(x^2+4)^2}$ より

$f(x)$の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-6	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{9}{2}$	↘	0

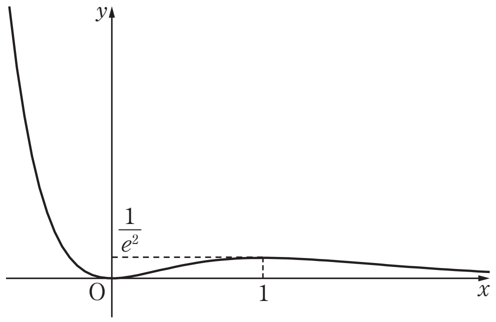
となるので，最大値は $\dfrac{9}{2}\left(x=\dfrac{2}{3}\right)$，最小値は $-\dfrac{1}{2}$ $(x=-6)$．

［B］ $y=x^2e^{-2x}$ より $y'=(x^2)'e^{-2x}+x^2(e^{-2x})'=2xe^{-2x}+x^2(-2e^{-2x})=2x(1-x)e^{-2x}$

となるので，y の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	∞	↘	0	↗	$\dfrac{1}{e^2}$	↘	0

となるので，グラフは右図．



［C］ $x=0$ は $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ の解である．

$x\neq 0$ のとき $x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ は $x^2-3x=k\sqrt{x}$ つまり $x\sqrt{x}-3\sqrt{x}=k$ と変形できるので，$f(x)=x\sqrt{x}-3\sqrt{x}$ とおいて $y=f(x)$ と $x=k$ の共有点の x 座標を考える．

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}$ より $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-3\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$ となるので，$f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	-2	$\nearrow$	∞

となる．

このことと $x=0$ を解にもつことより，$x^2-3x-k\sqrt{x}=0$ の異なる実数解の個数の最大値は 2 であり，このとき $-2<k\leqq 0$ である．